平成23年度都立高校数学入試問題解説　田中保成

$\boxed{1}$　次の各問に答えよ。

[問1]　$-3^2 \times \frac{4}{9} + 8$ を計算せよ

$$-3^2 \times \frac{4}{9} + 8$$

$$= -3 \times 3 \times \frac{4}{9} + 8$$

$$= -9 \times \frac{4}{9} + 8$$

$$= -\frac{9}{1} \times \frac{4}{9} + 8$$

$$= -\frac{\overset{1}{\cancel{9}} \times 4}{1 \times \underset{1}{\cancel{9}}} + 8$$

$$= -\frac{1 \times 4}{1 \times 1} + 8$$

$$= -\frac{4}{1} + 8$$

$$= -4 + 8$$

$$= 8 - 4$$

$$= 4$$

A.　4

$\boxed{1}$ 次の各問に答えよ。

［問2］　$a + 6b - 2(a - b)$ を計算せよ。

$a + 6b - 2(a - b)$

$= a + 6b - 2 \times (a - b)$

$= a + 6b - (2 \times a - 2 \times b)$

$= a + 6b - (2a - 2b)$

$= a + 6b - (+2a - 2b)$

$+(+) \rightarrow +$
$+(-) \rightarrow -$
$-(+) \rightarrow -$
$-(-) \rightarrow +$

$= a + 6b - 2a + 2b$

$= a - 2a + 6b + 2b$

$= 1a - 2a + 6b + 2b$

$= (1a - 2a) + (6b + 2b)$

$= (1 \times a - 2 \times a) + (6 \times b + 2 \times b)$

$= \{(1 - 2) \times a\} + \{(6 + 2) \times b\}$

$= \{(-1) \times a\} + \{(8) \times b\}$

$= (-1 \times a) + (8 \times b)$

$= (-1a) + (8b)$

$= -1a + 8b$

$= -a + 8b$

A. $-a + 8b$

$\boxed{1}$ 次の各問に答えよ。

[問3]　$(\sqrt{5}-1)^2$ を計算せよ。

$(\sqrt{5}-1)^2$　　　$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$= (\sqrt{5})^2 - 2(\sqrt{5})(1) + (1)^2$

$= (\sqrt{5}) \times (\sqrt{5}) - 2 \times (\sqrt{5}) \times (1) + (1) \times (1)$

$= \sqrt{5} \times \sqrt{5} - 2 \times \sqrt{5} \times 1 + 1 \times 1$

$= 5 - 2 \times 1 \times \sqrt{5} + 1$

$= 5 - 2 \times \sqrt{5} + 1$

$= 5 - 2\sqrt{5} + 1$

$= 5 + 1 - 2\sqrt{5}$

$= 6 - 2\sqrt{5}$

A.　$6 - 2\sqrt{5}$

$\boxed{1}$ 次の各問に答えよ。

[問4]　一次方程式　$3x - 8 = 7(x + 4)$　を解け。

$$3x - 8 = 7(x + 4)$$

$$3x - 8 = 7 \times (x + 4)$$

$$3x - 8 = (7 \times x + 7 \times 4)$$

$$3x - 8 = (7x + 28)$$

$$3x - 8 = 7x + 28$$

$$3x - \cancel{8} + \cancel{8} = 7x + 28 + 8$$

$$3x = 7x + 28 + 8$$

$$3x = 7x + 36$$

$$3x - 7x = \cancel{7x} - \cancel{7x} + 36$$

$$3x - 7x = 36$$

$$3 \times x - 7 \times x = 36$$

$$(3 - 7) \times x = 36$$

$$\{-(7 - 3)\} \times x = 36$$

$$\{-(4)\} \times x = 36$$

$$(-4) \times x = 36$$

$$(-4) \times (+x) = 36$$

$(+) \times (+) \rightarrow +$

$(+) \times (-) \rightarrow -$

$(-) \times (+) \rightarrow -$

$(-) \times (-) \rightarrow +$

$$(-4)\times(+x)\div(-4)=(+36)\div(-4)$$

$$+\frac{\overset{1}{\cancel{4}}\times x}{\underset{1}{\cancel{4}}}=-\frac{\overset{9}{\cancel{36}}}{\underset{1}{\cancel{4}}}$$

$$+\frac{1\times x}{1}=-\frac{9}{1}$$

$$+x=-9$$

$$x=-9$$

A.　$x=-9$

1　次の各問に答えよ。

［問5］　連立方程式 $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 5x + 9y = 6 \end{cases}$ を解け。

$$\begin{cases} x + 2y = 1 & \cdots\cdots \ (1) \\ 5x + 9y = 6 & \cdots\cdots \ (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1x + 2y = 1 & \cdots\cdots \ (1) \\ 5x + 9y = 6 & \cdots\cdots \ (2) \end{cases}$$

1と5の最小公倍数は 5

(1) × 5　$(1x + 2y) \times 5 = 1 \times 5$

$(1x \times 5 + 2y \times 5) = 1 \times 5$

$(1 \times x \times 5 + 2 \times y \times 5) = 1 \times 5$

$(1 \times 5 \times x + 2 \times 5 \times y) = 1 \times 5$

$(5 \times x + 10 \times y) = 1 \times 5$

$(5x + 10y) = 5$

$5x + 10y = 5 \quad \cdots\cdots \quad (3)$

(3) − (2)

$$\begin{array}{rr} & 5x + 10y = 5 \\ -) & 5x + 9y = 6 \\ \hline & 1y = -1 \end{array}$$

$x \to 5 - 5 = 0$

$y \to 10 - 9 = 1$

$5 - 6 = -1$

$y = -1 \quad \cdots\cdots \quad (4)$

(4)を(1)に代入　$x + 2y = 1$

$x + 2 \times y = 1$

$x + 2 \times (-1) = 1$

$$x + (-2 \times 1) = 1$$

$$x + (-2) = 1$$

$$x - 2 = 1$$

$$x - \cancel{2} + \cancel{2} = 1 + 2$$

$$x = 3$$

$+ (+) \rightarrow +$

$+ (-) \rightarrow -$

$- (+) \rightarrow -$

$- (-) \rightarrow +$

<u>A. $x = 3$, $y = -1$</u>

$\boxed{1}$ 次の各問に答えよ。

［問6］　二次方程式　$x^2 - 7x = 0$　を解け。

$$x^2 - 7x = 0$$

$$x \times x - 7 \times x = 0$$

$$(x - 7) \times x = 0$$

$x = 0$ のとき　左辺 $= (0 - 7) \times 0$

$= (-7) \times 0$

$= 0 =$ 右辺　となり等式がなりたつので $x = 0$ は解となります。

$x = 7$ のとき　左辺 $= (7 - 7) \times 7$

$= (0) \times 7$

$= 0 \times 7$

$= 0 =$ 右辺　となり等式がなりたつので $x = 7$ は解となります。

A.　$x = 0,\ 7$

$\boxed{1}$　次の各問に答えよ。

［問7］

右の図1のように 1，2，3，4，5，の数字を1つずつ書いた5枚のカードがある。

図 1

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$

この5枚のカードから同時に2枚のカードを取り出すとき，取り出した2枚のカードに書いてある数の積が10未満になる確率を求めよ。

ただし，どのカードが取り出されることも同様に確からしいとする。

［問題文の読み取り］

①「5枚のカードから同時に2枚のカードを取り出す」

国語の読み取りの基本はむずかしい言葉や熟語をわかりやすい言葉に言い換えることですが，数学の読み取りの基本は抽象的な事柄を具体的数字におきかえて考えることです。

ですから，ここでも「1，2，3，4，5，の5枚のカードの中から 1と2，1と3，1と4というように2枚のカードを取り出すとき」と具体的例を入れながら読むのです。

②「取り出した2枚のカードに書いてある数の積が」も具体的数字におきかえながら読むと「取り出したカードが例えば 2と3 であれば，その数をかけて $2 \times 3 = 6$ と出て来た答えの6が積となる」となります。

③「10未満」において10が入るのかどうかが問題となりますが，以下であれば10が入りますが未満では入らないので［ 1，2，3，4，5，6，7，8，9 ］の範囲になるということになります。

④　確率は確からしさのことで，例えば3本のくじの中に当たりくじが1本入っているときの当たる確率を$\frac{1}{3}$と分数で表します。つまり，全体の場合の数を分母にして条件の付けられた場合の数を分子にして表すのです。

［思考過程］

⑤　ここでは，5枚のカードから2枚を選ぶ場合の数が分母になります。

⑥　その求め方ですが，まず順番に取り出して2けたの数を作ると考えます。

⑦　5枚の中から十の位の数の1枚を取り出す方法は5通りとなります。

⑧　次に残り4枚の中から一の位の数を1枚取り出す方法は4通りとなります。

⑨　ということは，最初が5通りで2番目が4通りですから全部で

$$5 \times 4 = 20\text{(通り)}$$　　となります。

1 − 2	2 − 1	3 − 1	4 − 1	5 − 1
1 − 3	2 − 3	3 − 2	4 − 2	5 − 2
1 − 4	2 − 4	3 − 4	4 − 3	5 − 3
1 − 5	2 − 5	3 − 5	4 − 5	5 − 4

⑩　ここで，同時に取り出した2枚のカードの数字をかけ合わせると，例えば 1 × 2 も 2 × 1 も積は等しくなるので 組み合わせとしては，順番に並べる通りの半分ということになるので

$$20 \div 2 = 10\text{(通り)}$$　　となります。

⑪　これを1つの式で表すと

$$\frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10\text{(通り)}$$　　となります。

1 − 2	2 − 1	3 − 1	4 − 1	5 − 1
1 − 3	2 − 3	3 − 2	4 − 2	5 − 2
1 − 4	2 − 4	3 − 4	4 − 3	5 − 3
1 − 5	2 − 5	3 − 5	4 − 5	5 − 4

⑫　これで確率をもとめるときの分母の数が 10 になるということになります。

⑬　次に，この組み合わせの積を求めると

1 × 2 = 2			
1 × 3 = 3	2 × 3 = 6		
1 × 4 = 4	2 × 4 = 8	3 × 4 = 12	
1 × 5 = 5	2 × 5 = 10	3 × 5 = 15	4 × 5 = 20

となります。

⑭　この中から10未満[1～9]になる組み合わせを探すと

$1 \times 2 = 2$			
$1 \times 3 = 3$	$2 \times 3 = 6$		
$1 \times 4 = 4$	$2 \times 4 = 8$	$3 \times 4 = 12$	
$1 \times 5 = 5$	$2 \times 5 = 10$	$3 \times 5 = 15$	$4 \times 5 = 20$

となります。

⑮　ということは，条件にある場合は

6通り　　　　となります。

⑰　この6通りが確率を表す分子になるので，求める確率は

$$\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

となります。

A. $\frac{3}{5}$

1　次の各問に答えよ。

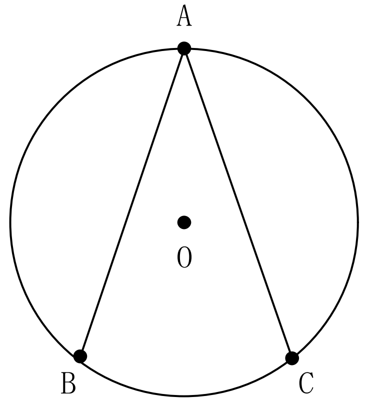
[問8]

右の図2で，3点 A，B，C は，円Oの周上にあり，お互いに一致しない。

円Oの半径が10cm，∠BAC = 36° のとき，点Aを含まない $\overset{\frown}{BC}$ の長さは何cmか。

ただし，円周率は π とする。

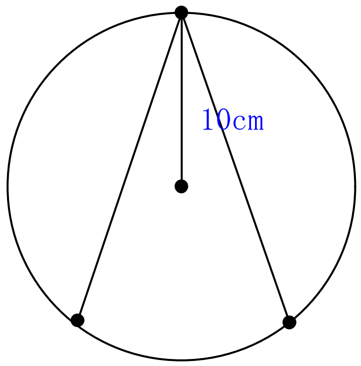
図2



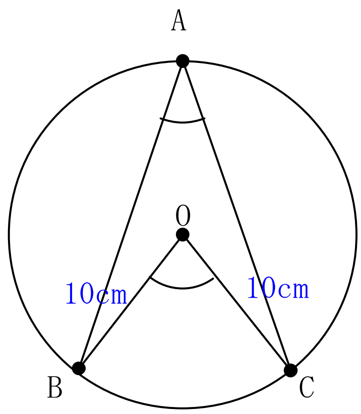
[問題の読み取り]

① 条件が問題文の中だけで図に記入してない場合があります。その理由は2つあります。1つは単純に図に書き入れるスペースがない場合です。もう1つはそれを書き入れるとヒントになってしまう場合です。

② ここでは角度についてはスペースがなかったと思われますが，半径10cmはそれを書き入れるところによっては明らかにヒントになるという性質のものです。



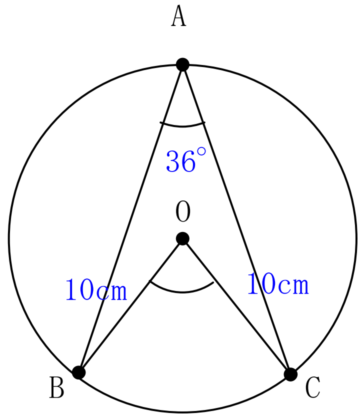
ヒントにならない



円周角と中心角の関係が連想できる

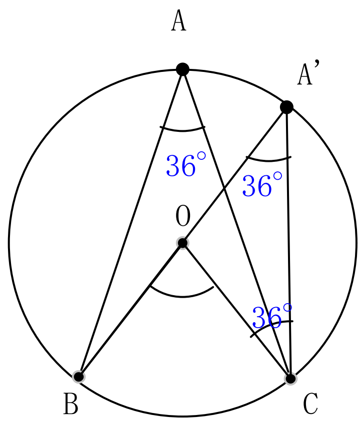
[思考過程]

③ 問題文の中で与えられた条件は必ず図の中に書き入れてから考えます。書き入れるのに小さい場合には大きく拡大した図をかいて考えます。



④　ここで，中心角は円周角の2倍ということを覚えていないとこの問題はすんなりとは解けません。ただ，同じ弧の上に立つ円周角は等しいということを覚えていればどうにかなる可能性はあります。

ABをずらして直径に重ねると$\angle BA'C = 36^\circ$となり，$OA' = OC =$ 半径で$\triangle A'OC$は二等辺三角形となるので$\angle A'CO = 36^\circ$となります。
ということは$\angle BOC$は$\triangle A'OC$の外角になり，となりあわない2つの角の和に等しくなるので



$$\angle BOC = 36^\circ + 36^\circ$$

$$= 72^\circ$$ となります。

⑤　円Oの半径が10cmということは直径は半径の2倍なので，円Oの直径は

$$10 \times 2 = 20\,(\mathrm{cm})$$ となります。

⑥　ということは円Oの円周の長さを公式にあてはめて求めると

直径 × 円周率 = 円周の長さ

$$20 \times \pi = 20\pi\,(\mathrm{cm})$$ となります。

⑦　つまり，中心角が360°のとき 20πcm という関係がなりたつので，中心角が1°のときの孤の長さは

$$20\pi \div 360 = \frac{20\pi}{360}$$

$$= \frac{2\pi}{36}$$

$$= \frac{\pi}{18}\,(\mathrm{cm})$$ となります。

⑧　中心角が1°のときの孤の長さが $\frac{\pi}{18}$cm ということは 中心角が 72°のときの孤の $\overset{\frown}{BC}$ の長さは

$$\frac{\pi}{\underset{1}{\cancel{18}}} \times \overset{4}{\cancel{72}} = 4\pi\,(\mathrm{cm})$$ となります。

［解答］

⑨　これを1つの式でまとめると

$$10 \times 2 \times \pi \times \frac{36 \times 2}{360} = \frac{1\cancel{0} \times 2 \times 36 \times 2 \times \pi}{36\cancel{0}}$$

$$= \frac{1 \times 2 \times \overset{1}{\cancel{36}} \times 2 \times \pi}{\underset{1}{\cancel{36}}}$$

$$= \frac{1 \times 2 \times 1 \times 2 \times \pi}{1}$$

$$= \frac{4\pi}{1}$$

$$= 4\pi\,(\mathrm{cm})$$ となります。

A.　4πcm

1　次の各問に答えよ。

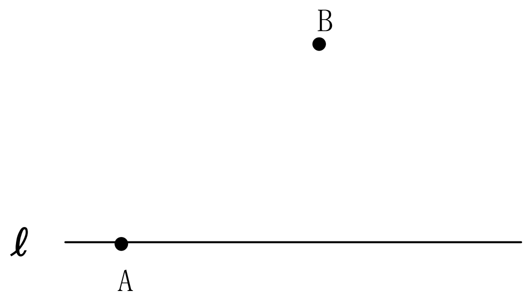
［問9］

右の図3で，点Aは直線ℓ上にある点で，点Bは直線ℓ上にない点である。

解答欄に示した図をもとにして，直線ℓ上に中心があり，点Aと点Bを通る円の中心Oを，定規とコンパスを用いて作図によって求め，中心Oの位置を示す文字Oも書け。

ただし，作図に用いた線は消さないでおくこと。

図3



［問題文の読み取り］

① コンパスは角度を作り，定規は直線を引くのに使います。

② 作図はすべて三角形を描くと考えてよいのです。とくに合同な三角形を描く場合がほとんどだと言っても過言ではありません。

③ 角を2等分する場合でも，垂線を引く場合でもすべて合同な三角形の作図を利用しているのです。

④ ということは，三角形の合同条件は作図においても大いにヒントになるのです。

(1) 3辺がそれぞれすべて等しい。
(2) 2辺とその間の角がそれぞれ等しい。
(3) 1辺とその両端の角がそれぞれ等しい。

［思考過程］

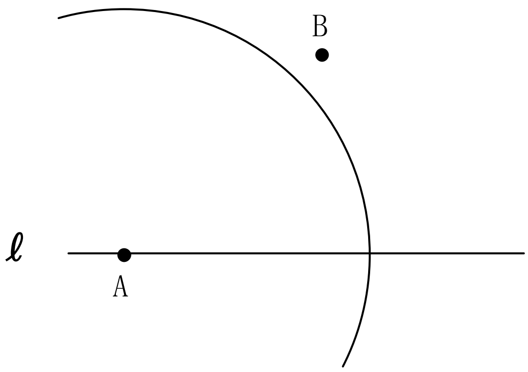
⑤ 点Aと点Bが円周上の点になるということは中心からの距離が等しいということになります。

⑥ また，線分ABの垂直二等分線上の点から点Aと点Bまでの距離は等しいともいえます。

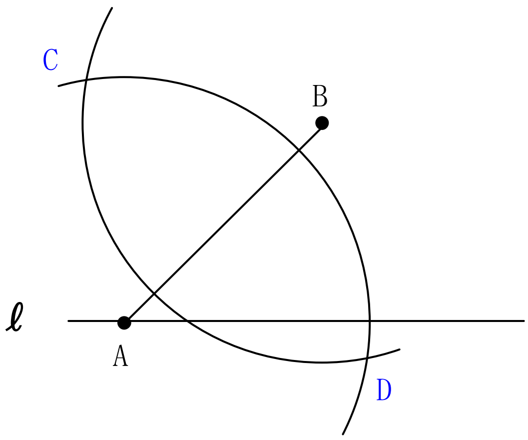
⑦　ということは，線分ABの垂直二等分線が直線ℓと交わる点が円の中心になるということになります。

［作図過程］

⑧　ということは線分ABの垂直二等分線を引くにはまず点Aを中心とした円をえがきます。

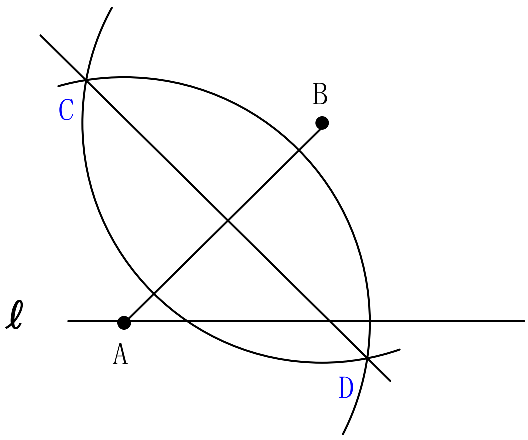


⑨　この円と同じ半径の円を点Bを中心にして描くと

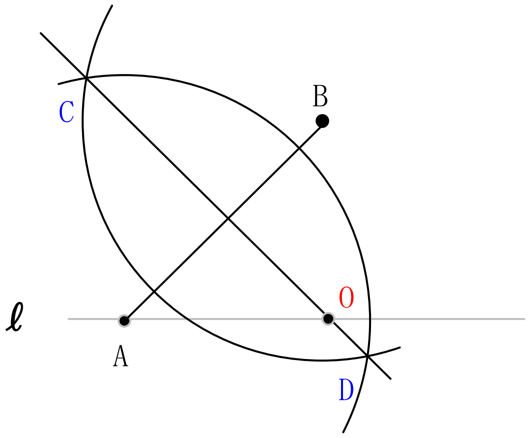


となります。

⑩　2つの円の交点をC,Dとして，それを直線で結ぶと線分ABの垂直二等分線になります。



⑪　この垂直二等分線と直線ℓとの交点を0とすると



となります。

$\boxed{2}$ ある中学校で，Sさんが作った問題をみんなで考えた。
次の問に答えよ。

[Sさんが作った問題]

右の図1のように，9つの正方形の枠内に文字 a，b，c d，e，f，g，h，i を書いた表がある。

図1において，連続する9つの自然数を小さい方から順に，a，b，c，d，e，f，g，h，i にそれぞれ代入する。

次の図2は，図1において，1から始まる連続する9つの自然数をそれぞれ代入した場合を表しており，図3は図1において，2から始まる連続する9つの自然数をそれぞれ代入した場合を表している。

図1において，連続する9つの自然数を小さい方から順に，a，b，c，d，e，f，g，h，i にそれぞれ代入するとき，a + b + i = 30 となる e の値を調べてみよう。

図1

a	b	c
d	e	f
g	h	i

図2

1	2	3
4	5	6
7	8	9

図3

2	3	4
5	6	7
8	9	10

[問1]

[Sさんが作った問題]で，a + e + i = 30 となる e の値を求めよ。

[問題文の読み取り]

① これだけ長い問題文を一気に読むことは脳内処理能力をこえ，せっかく読んでわかったことも情報としては消えてしまうことがあるからです。

② ではどうするか。それは段落ごとに一息いれることです。例えば，「…書いた表がある。」というところで，視線を文から表に向けるというような行為をすることです。

③ 一息いれることによって，それまでの情報を処理し要約して格納することができるので、次の情報を処理している間にそれまでの情報が消えるということがなくなるのです。

[思考過程]

④ 考えるための出発点は比べることです。

⑤　比べてその違いに気づくことです。

⑥　そして，その違いはなぜ生じたのかを推理するのです。

⑦　そうすると，その違いは単なる偶然ではなく1つの法則によって変化しているということに気づくのです。

⑧　この気づきが「論理がわかった」ということなのです。

⑨　ここで，a，e，i を比べると，

a ＝ 1，　e ＝ 5，　i ＝ 9

a ＝ 2，　e ＝ 6，　i ＝ 10　　　　となります。

a	b	c
d	e	f
g	h	i

⑩　これから，気づくことは

5 － 1 ＝ 4
9 － 5 ＝ 4

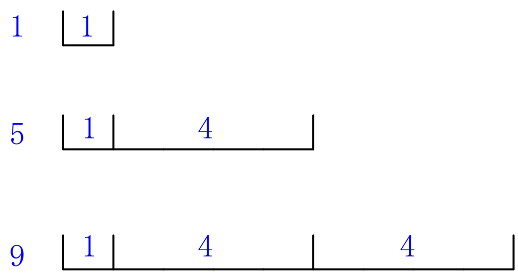
6 － 2 ＝ 4
10 － 6 ＝ 4　　　　となります。

1	2	3
4	5	6
7	8	9

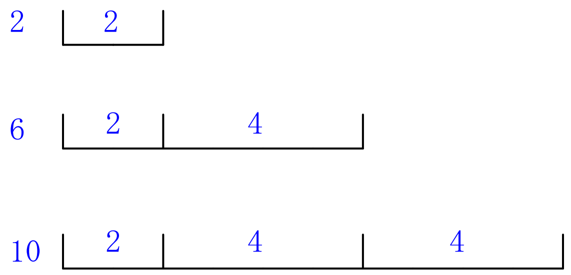
2	3	4
5	6	7
8	9	10

⑪　数字はデジタルで量をそのまま表してはいません。

⑫　そこで，アナログといって量を直接表す方法で比べるために線分図にすると



1 ＋ 5 ＋ 9 ＝ 15



2 + 6 + 10 = 18

これらを比べると突き出している部分は常に

4 × 3 = 12　　　　　　となります。

⑬　つまり，その部分をのぞくいて3等分すると a の値を求めることができるということです。

(15 - 12) ÷ 3 = 1

(18 - 12) ÷ 3 = 2　　　　　　となります。

⑭　ということは a + e + i = 30 から 12 をのぞいて3等分すると，この場合のaの値を求めることができるということになるので

(30 - 12) ÷ 3 = 18 ÷ 3

= 6　　　　　　となります。

⑮ a = 6 となるので，求める e は a より4大きいのですから

6 + 4 = 10　　　　　　となります。

A.　e = 10

2　先生は［Sさんが作った問題］をもとにして，次の問題を作った。

［先生が作った問題］

図1において，PとQをそれぞれ，$P = b \times h + d \times f$　$Q = a \times i + c \times g$ とする。

図2で，PとQはそれぞれ，$P = 2 \times 8 + 4 \times 6 = 40$，$Q = 1 \times 9 + 3 \times 7 = 30$ であり，このとき，$P - Q = 10$ となる。また，図3で，PとQはそれぞれ，$P = 3 \times 9 + 5 \times 7 = 62$，$Q = 2 \times 10 + 4 \times 8 = 52$ であり，このときも，$P - Q = 10$ となる。

図1において，連続する9つの自然数を小さい方から順に a，b，c，d，e，f，g，h，i に代入するとき，連続する9つの自然数がどの数から始まる場合でも，$P - Q = 10$ となることを確かめなさい。

図1

a	b	c
d	e	f
g	h	i

図2

1	2	3
4	5	6
7	8	9

図3

2	3	4
5	6	7
8	9	10

［問2］

［先生が作った問題］で，a，b，c，d，e，f，g，h，i をそれぞれ e を用いて表し $P - Q = 10$ になることを証明せよ。

［問題文の読み取り］

①　数学は具体的な事象をだんだん抽象的な論理にしていく学問です。

②　それは，具体的な数字をつかうと1つの場合に限定されますが，それを文字で表すと色々な場合を表すことができる抽象的表現になるということです。

［思考過程］

③　考える出発点は比べることです。

④　a と e を比べると a は e より 4 小さいので

$a = e - 4$　　　　となります。

⑤　b と e を比べると b は e より 3 小さいので

$b = e - 3$　　　　となります。

⑥　c と e を比べると c は e より 2 小さいので

$c = e - 2$　　　　となります。

⑦　d と e を比べると d は e より 1 小さいので

$d = e - 1$　　　　となります。

⑧　f と e を比べると f は e より 1 大きいので

$f = e + 1$　　　　となります。

⑨　g と e を比べると g は e より 2 大きいので

$g = e + 2$　　　　となります。

⑩　h と e を比べると h は e より 3 大きいので

$h = e + 3$　　　　となります。

⑪　i と e を比べると i は e より 4 大きいので

$i = e + 4$　　　　となります。

⑫　ここで，Pをすべて e で表すと

$P = b \times h + d \times f$

$= (e - 3) \times (e + 3) + (e - 1) \times (e + 1)$

$= e^2 - 3^2 + e^2 - 1^2$

乗法公式
$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$

$= e^2 + e^2 - 3^2 - 1^2$

$= 1e^2 + 1e^2 - 3 \times 3 - 1 \times 1$

$= (1 + 1)e^2 - 9 - 1$

$= (2)e^2 - (9 + 1)$

$= 2e^2 - (10)$

$= 2e^2 - 10$　　　　となります。

⑬　次に Qをすべて e で表すと

$Q = a \times i + c \times g$

$= (e - 4) \times (e + 4) + (e - 2) \times (e + 2)$

$= e^2 - 4^2 + e^2 - 2^2$

乗法公式
$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$

$= e^2 + e^2 - 4^2 - 2^2$

$= 1e^2 + 1e^2 - 4 \times 4 - 2 \times 2$

$= (1 + 1)e^2 - 16 - 4$

$= (2)e^2 - (16 + 4)$

$= 2e^2 - (20)$

$= 2e^2 - 20$　　　　となります。

⑭　ということで， P − Q の値を求めると

$+ (+) \to +$
$+ (-) \to -$
$- (+) \to -$
$- (-) \to +$

$P - Q = (2e^2 - 10) - (2e^2 - 20)$

$= 2e^2 - 10 - 2e^2 + 20$

$= 2e^2 - 2e^2 + 20 - 10$

$= (2 - 2)e^2 + 10$

$= (0)e^2 + 10$

$= 0e^2 + 10$

$= 0 + 10$

$= 10$　　　　　　　　　　となります。

[解答]

$a = e - 4,\quad b = e - 3,\quad c = e - 2,\quad d = e - 1$

$f = e + 1,\quad g = e + 2,\quad h = e + 3,\quad i = e + 4$

$P = b \times h + d \times f$

$= (e - 3) \times (e + 3) + (e - 1) \times (e + 1)$

$= e^2 - 3^2 + e^2 - 1^2$

$= e^2 - 9 + e^2 - 1$

$= 2e^2 - 10$

$Q = a \times i + c \times g$

$= (e - 4) \times (e + 4) + (e - 2) \times (e + 2)$

$= e^2 - 4^2 + e^2 - 2^2$

$= e^2 - 16 + e^2 - 4$

$= 2e^2 - 20$

$$P - Q = (2e^2 - 10) - (2e^2 - 20)$$

$$= 2e^2 - 10 - 2e^2 + 20$$

$$= 10$$

３

右の図1で，　点0は原点，曲線ℓは

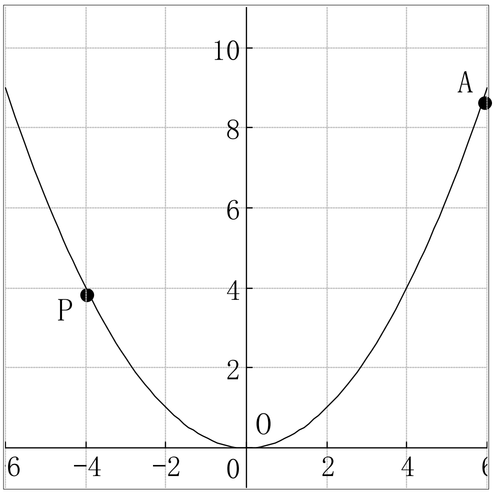
関数 $y = \frac{1}{4}x^2$ のグラフを表している。

点Aは曲線上にあり，x座標は 6 である。

曲線ℓ上にある点をPとする。

次の各問に答えよ。

図1



［問1］

点Pのx座標を a，y座標を b とする。

a のとる値の範囲が，$-5 \leqq a \leqq 4$のとき

b のとる範囲を不等号を使って

$\boxed{\quad} \leqq b \leqq \boxed{\quad}$

で表せ。

［問題の読み取り］

① 1次関数は中2から学び，2次関数は中3から学びますので，どうしても1次関数の方がしっかりと定着しているものです。

② ということは，「範囲」という単語から連想するのは先ず1次関数の範囲がどうしてもでてきます。

③ それも正の傾きのグラフ、つまり x座標が大きくなるに従ってy座標も大きくなる右上がりのグラフが頭に浮かびます。

④ というより,xの値が最小のときyの値も最小となり，xの値が最大のときyの値も最大となるという結果だけが頭に浮かぶものです。

［思考過程］

⑤ $y = \frac{1}{4}x^2$ の2次関数は係数が正なのでグラフからも読み取れるように下向きのグラフになっています。

⑥ ですから，xの範囲が原点0を挟んでいる場合には $x = 0$ のとき yの値が最小となり

最小値 0　　　　　　となります。

⑦　次に最大値は，原点から遠くなればなるほどyの値は大きくなるのでxの範囲が $-5 \leqq x \leqq 4$ ということから，原点からの距離が長い $x=-5$ のとき yの値が最大となり，最大値は

$$y = \frac{1}{4}x^2$$

$$= \frac{1}{4}(-5)^2$$

$$= \frac{1}{4} \times (-5) \times (-5)$$

$(+) \times (+) \rightarrow +$
$(+) \times (-) \rightarrow -$
$(-) \times (+) \rightarrow -$
$(-) \times (-) \rightarrow +$

$$= +\frac{1}{4} \times 5 \times 5$$

$$= +\frac{25}{4}$$

$$= \frac{25}{4}$$

となります。

⑧　ということから，yの最小値が 0 で，最大値が $\frac{25}{4}$ となるので，これを不等式を使って表すと

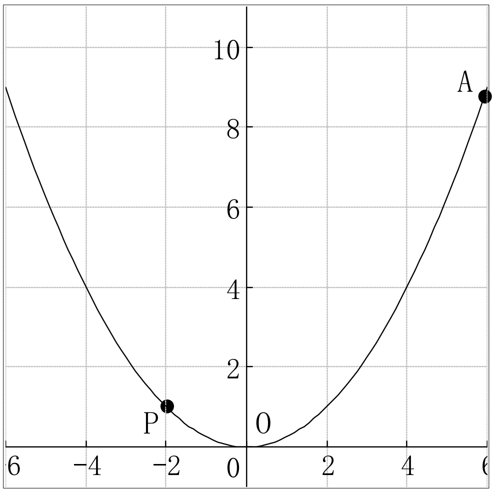
$$0 \leqq b \leqq \frac{25}{4}$$

となります。

A.　$0 \leqq b \leqq \frac{25}{4}$

［問2］

点Pのx座標が -2 のとき，2点A，P を通る直線の式を求めよ。



［問題の読み取り］

① 直線の式から具体的な式を連想すると

$y = ax + b$　　となります。

② グラフ上の点(x座標，y座標)の座標の値を直線を表す方程式 $y = ax + b$ に代入したとき等式がなりたつという性質があります。

［思考過程］

③ 点Pは曲線 $y = \frac{1}{4}x^2$ 上の点ですから，点Pのx座標の値を代入して等式が成り立つyの値が点Pのy座標の値となります。

④ 点Pのx座標が -2 ということですから，これを代入してyの値を求めると

$$y = \frac{1}{4}x^2$$

$$y = \frac{1}{4} \times x \times x$$

$$y = \frac{1}{4} \times (-2) \times (-2)$$

$$y = +\left(\frac{1}{4} \times 2 \times 2\right)$$

$$y = +\left(\frac{4}{4}\right)$$

$$y = +(1)$$

$$y = +1$$

$y = 1$　　点P(-2，1)　となります。

⑤　点Aも曲線 $y = \frac{1}{4}x^2$ 上の点なので，点Aのx座標の値 6 を代入して等式が成り立つyの値を求めると

$$y = \frac{1}{4}x^2$$

$$y = \frac{1}{4} \times x \times x$$

$$y = \frac{1}{4} \times 6 \times 6$$

$$y = \frac{39}{4}$$

$$y = \frac{9}{1}$$

$y = 9$　　　　点A(6, 9)　　　となります。

⑥　点P(− 2, 1)と点A(6, 9)を通る直線の式を $y = ax + b$ とすると，それぞれの点の座標を代入しても等式が成り立つので

点P(− 2, 1)を代入　　$y = ax + b$

$$y = a \times x + b$$

$$1 = a \times (-2) + b$$

$1 = -2a + b$　　　……　(1)

点A(6, 9)を代入　　$y = ax + b$

$$y = a \times x + b$$

$$9 = a \times 6 + b$$

$9 = 6a + b$　　　……　(2)　となります。

⑦　(1)と(2)を連立方程式にして，a と b の値を求めると

$$\begin{cases} -2a + b = 1 & \cdots\cdots \quad (1) \\ 6a + b = 9 & \cdots\cdots \quad (2) \end{cases}$$

(2) − (1)

$$\begin{array}{rr} & 6a + b = 9 \\ -) & -2a + b = 1 \\ \hline & 8a \quad = 8 \end{array}$$

$x \to 6 - (-2) = 6 + 2 = 8$

$y \to 1 - 1 = 0$

$9 - 1 = 8$

$$\frac{\cancel{8}a}{\cancel{8}} = \frac{8}{8}$$

$$a = \frac{8}{8}$$

$$a = 1 \quad \cdots\cdots \quad (3)$$

(3)を(2)に代入して b の値を求めると

$$6a + b = 9$$

$$6 \times a + b = 9$$

$$6 \times 1 + b = 9$$

$$6 + b = 9$$

$$\cancel{6} - \cancel{6} + b = 9 - 6$$

$$b = 3$$

となります。

⑧　a = 1，b = 3 を点Aと点Pを通る直線を y = ax + b に代入して求めると

$$y = 1x + 3$$

$$y = x + 3$$

となります。

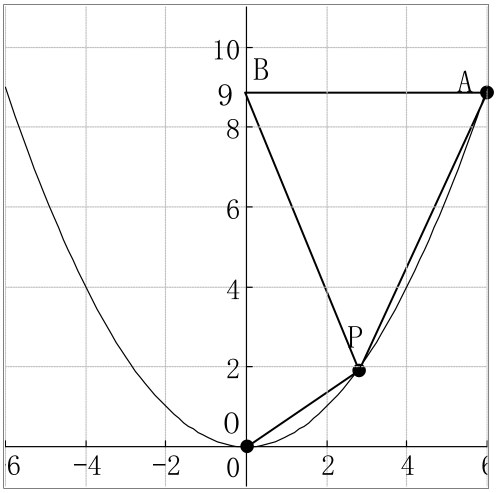
A．$y = x + 3$

［問3］

右の図2は，図1において，点Pのx座標が6より小さい正の数であるとき，点Aを通りx軸に平行な直線を引き，y軸との交点をBとし，点Aと点P，点Bと点P点Oと点Pをそれぞれ結んだ場合を表している。

△ABPの面積と△BOPの面積の比が 3 ： 2 となるとき，点Pの座標をもとめよ。

図2



［問題文の読み取り］

① これだけ多くの情報が入った問題文を一気に読むことは脳内処理能力を越えて危険です。

② 脳内処理能力と思考力とは別な能力ですから混同しないようにして下さい。例えば3けたの掛け算が暗算できないからといって数学的思考力がないとはいえないことと同じことなのです。筆算すればよいだけのことです。

③ 珠算は頭の中のそろばんの玉を映像的に変化させているだけですが，それができるまでには相当の練習が必要です。それと同様にこれだけの情報を頭の中だけで処理するには相当な練習が必要です。

④ ではどうすればよいかということになります。筆算は分解して計算しその計算過程を視覚化しています。それと同じように思考過程を分化して視覚化していけばよいのです。

［思考過程］

⑤ 問題文を分解して読み取っていきます。

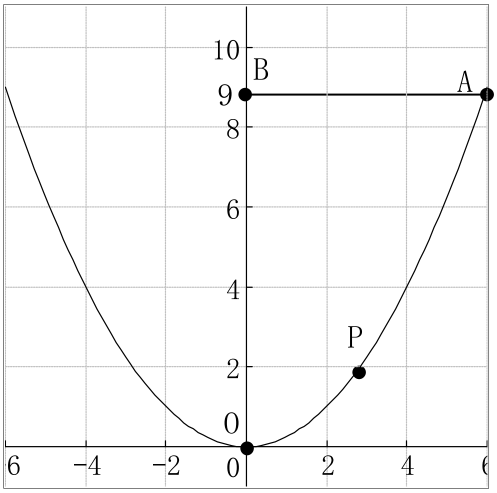
⑥ 点Pのx座標が6より小さいということは6より左側にあるということになります。

⑦ 正の数ということは0より大きいということですから，原点より右側にあるということになります。

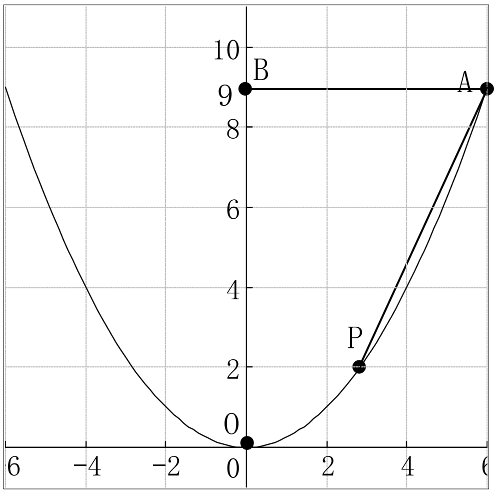
⑧ ということで，点Pを原点とx座標6の間の適当なところに打てばよいということになります。

⑨　点A(6, 9)を通りx軸に平行な直線引き
y軸との交点をBとするということは点B
の座標はx座標は 0 となり, y座標は点A
のy座標と等しくなるので 9 となります。
ですから,点Bの座標は

B(0, 9)　　　　となります。



⑩　次に, 点Aと点Pを結びます。

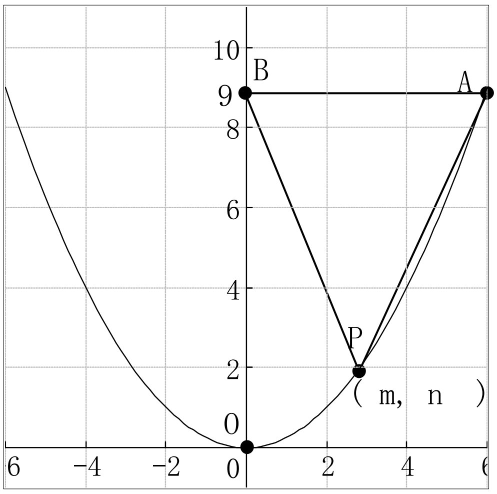


⑪　その次に,点Bと点Pを結びます。
すると△ABPができて底辺ABの長さは点Aと
点Bのx座標の差なので

6 − 0 = 6　　　　となります。

⑫　また, 高さは点Aと点Pのy座標の差なので
点Pの座標を(m , n)とすると

9 − n　　　　　　となります。



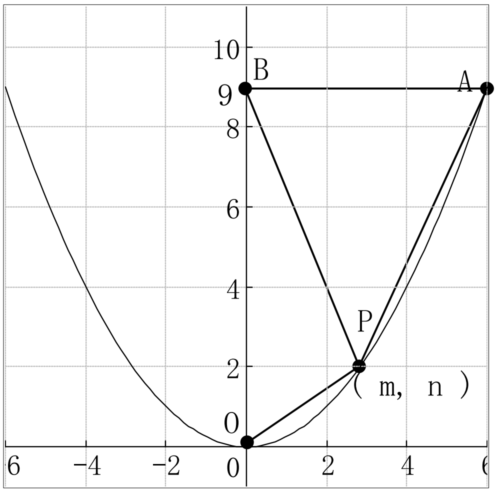
⑬　ということから△ABPは底辺が6で高さが(9 − n)の三角形になるのでその面積は

$$\overset{3}{\cancel{6}} \times (9-n) \times \frac{1}{\cancel{2}_{1}} = 3 \times 9 - 3 \times n$$

$= 27 - 3n$　　となります。

⑭　そして，点0と点Pを結びます。
すると，△BOPができて底辺BOの長さは
点Bのy座標と点0のy座標との差なので

$9 - 0 = 9$　　となります。



⑮　また，高さは点0と点Pのx座標の差なので
点Pの座標を(m, n)とすると

$m - 0 = m$　　となります。

⑯　ということから△BOPは底辺 9 で高さが m の三角形になるのでその面積は

$9 \times m \times \frac{1}{2} = \frac{9}{2}m$　　となります。

⑰　ここで，△ABPの面積と△BOPの面積を比にすると

$\triangle ABP : \triangle BOP = (27 - 3n) : \frac{9}{2}m$　　となります。

⑱　この比が 3 : 2 となるということですから

$(27 - 3n) : \frac{9}{2}m = 3 : 2$　　となります。

⑲　比例式において外項の積と内項の積は等しいという性質を利用して等式にすると

外項

$(27 - 3n) : \frac{9}{2}m = 3 : 2$

内項

$(27 - 3n) \times 2 = \frac{9}{2}m \times 3$

$$27 \times 2 - 3n \times 2 = \frac{27}{2}m$$

$$54 - 6n = \frac{27}{2}m \quad \cdots\cdots \quad (1)$$ となります。

⑳　1つの式の中に m と n というように2つの未知数がある場合には，その未知数を求めることはできません。

21　ですから，m と n を含んだもう1つの等式が作れるはずだと思うのです。

22　すると，その意識につられて脳は自動的に作動し，点Pは $y = \frac{1}{4}x^2$ 上の点だから点Pの座標(m, n)を代入しても等式は成り立つといことの気づくのです。

23 そこで，x に m，y に n を代入して等式を求めると

$$n = \frac{1}{4}m^2 \quad \cdots\cdots \quad (2)$$ となります。

24　そして，(2)を(1)に代入して n の値を求めると

$$54 - 6n = \frac{27}{2}m$$

$$54 - 6 \times n = \frac{27}{2}m$$

$$54 - \overset{3}{\cancel{6}} \times \frac{1}{\underset{2}{\cancel{4}}}m^2 = \frac{27}{2}m$$

$$54 - \frac{3}{2}m^2 = \frac{27}{2}m$$

$$\left(54 - \frac{3}{2}m^2\right) \times 2 = \frac{27}{\underset{1}{\cancel{2}}}m \times \overset{1}{\cancel{2}}$$

$$54 \times 2 - \frac{3}{\cancel{2}_{1}} m^2 \times \cancel{2}^{1} = \frac{27}{1} m \times 1$$

$$108 - \frac{3}{1} m^2 \times 1 = 27m$$

$$108 - 3m^2 = 27m$$

$$36 - m^2 = 9m$$

$$36 - \cancel{m^2} + \cancel{m^2} = 9m + m^2$$

$$36 = 9m + m^2$$

$$\cancel{36} - \cancel{36} = 9m + m^2 - 36$$

$$0 = 9m + m^2 - 36$$

$$0 = m^2 + 9m - 36$$

右辺と左辺を総入れ替えしたので符号は変わらない

$$m^2 + 9m - 36 = 0$$

$1 \times (-36) \rightarrow 1 + (-36) = -35 \neq 9$

$2 \times (-18) \rightarrow 2 + (-18) = -16 \neq 9$

$3 \times (-12) \rightarrow 3 + (-12) = -9 \neq 9$

$4 \times (-9) \rightarrow 4 + (-9) = -5 \neq 9$

$6 \times (-6) \rightarrow 6 + (-6) = 0 \neq 9$

$9 \times (-4) \rightarrow 9 + (-4) = 5 \neq 9$

$12 \times (-3) \rightarrow 12 + (-3) = 9 = 9$

$$(m + 12)\{m + (-3)\} = 0$$

$$(m + 12)(m - 3) = 0$$

$+(+) \rightarrow +$

$+(-) \rightarrow -$

$-(+) \rightarrow -$

$-(-) \rightarrow +$

m ＝ － 12 のとき

$(-12+12)(-12-3) = (0)(-15)$

$= 0 \times (-15)$

$= 0 =$ 右辺　となるので m ＝ － 12 は解

m ＝ 3 のとき

$(3+12)(-3+3) = (15)(0)$

$= 15 \times 0$

$= 0 =$ 右辺　となるので m ＝ 3 は解

25　ここで m の解は － 12 と 3 になりますが，条件で点Pのx座標は6より小さいが正の数ということが与えられているので，この条件からすると － 12 はのぞかなければならないということになり，

m ＝ 3　　　　　　　　　　　となります。

26　点Pのx座標が 3 ということになるので，$y = \frac{1}{4}x^2$ に代入して点Pのy座標の値を求めると

$$y = \frac{1}{4}x^2$$

$$y = \frac{1}{4} \times x \times x$$

$$y = \frac{1}{4} \times 3 \times 3$$

$$y = \frac{9}{4}$$

となります。

27　ということで点Pのx座標が 3 で，y座標が $\frac{9}{4}$ となるので，点Pの座標は

$$P\left(3,\ \frac{9}{4}\right)$$ となります。

A. $P\left(3,\ \frac{9}{4}\right)$

[解答]

点Pの座標を（ m, n ）とすると

$$\triangle ABP = 6 \times (9 - n) \times \frac{1}{2} = 3 \times (9 - n)$$

$$= 27 - 3n$$

$$\triangle BOP = 9 \times m \times \frac{1}{2} = \frac{9}{2}m$$

$$\triangle ABP : \triangle BOP = (27 - 3n) : \frac{9}{2}m = 3 : 2$$

$$(27 - 3n) \times 2 = \frac{9}{2}m \times 3$$

$$54 - 6n = \frac{27}{2}m$$

$$108 - 12n = 27m$$

$$36 - 4n = 9m \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

点P(m, n)は $y = \frac{1}{4}x^2$ 上の点なので

$$n = \frac{1}{4}m^2 \quad \cdots\cdots \quad (2)$$

(2)を(1)に代入すると

$$36 - 4 \times \frac{1}{4}m^2 = 9m$$

$$36 - m^2 = 9m$$

$$m^2 + 9m - 36 = 0$$

$$(m + 12)(m - 3) = 0$$

$$m = -12,\ 3$$

ただし，mは正の数なので　$m = 3$

$$n = \frac{1}{4}m^2$$

$$= \frac{1}{4}(3)^2$$

$$= \frac{9}{4}$$

よって，点Pの座標は $\left(3,\ \frac{9}{4}\right)$

A. $\left(3,\ \frac{9}{4}\right)$

$\boxed{4}$

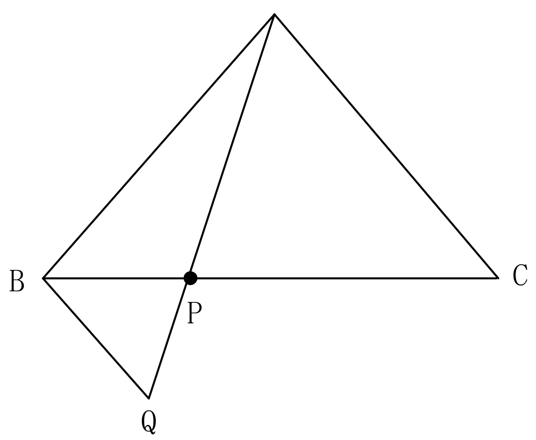
右の図1で，△ABCは AB = AC，∠BACが鋭角の二等辺三角形である。

点Pは，辺BC上にある点で，頂点B,頂点Cのいずれにも一致しない。

頂点Aと点Pを結び，線分APをPの方向に延した直線と，頂点Bを通り辺ACに平行な直線との交点をQとする。

次の各問に答えよ。

図1

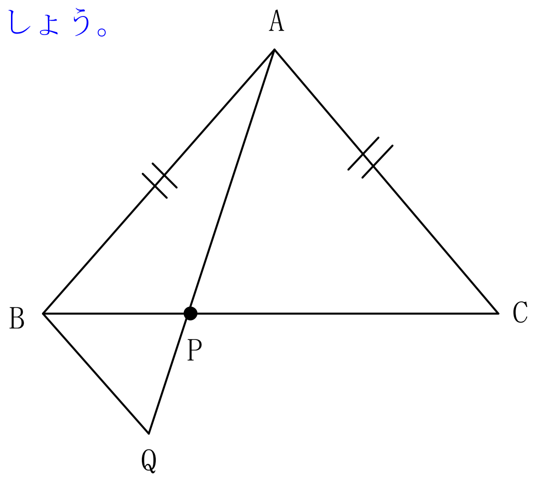


［問1］ 図1において，∠BAC= 70°，△ABPの内角である∠BAPの大きさを a° とするとき，△BQPの内角である∠BPQの大きさを a を用いた式で表せ。

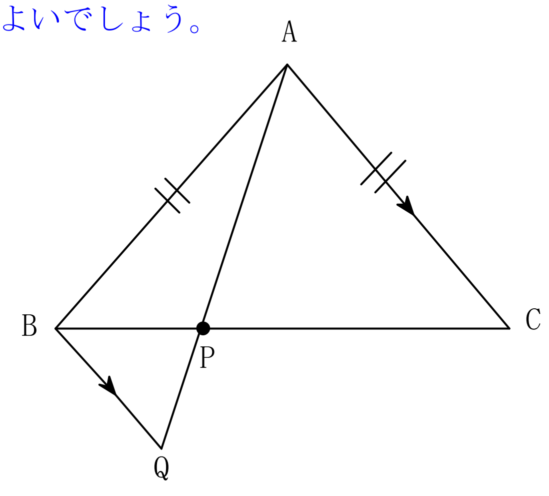
［問題文の読み取り］

① 問題文の中にある条件はすべて図の中に書き入れてから考えるようにしなければなりません。そうしないと，条件を見落としてしまう危険があるからです。

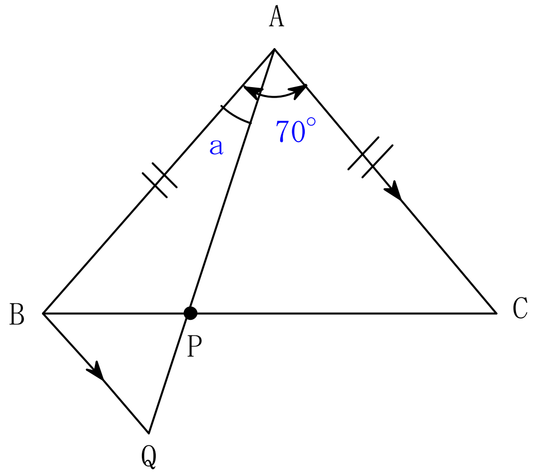
② AB = AC は短い2本線をつけるとよいでしょう。



③ ACとBQは平行になるので→をつけるとよいでしょう。



④　∠BAC ＝ 70°　で∠BAP ＝ a°　という条件を書きこみます。



⑤　これらが出題者が直接与えた直接条件といわれるものです。

⑥　簡単な問題は直接条件をそのまま使って問題を解決できるのですが，入試問題ではそうはいきません。

⑦　つまり，直接条件を使って問題を解決するための条件を導きださなければならないのです。

［思考過程］

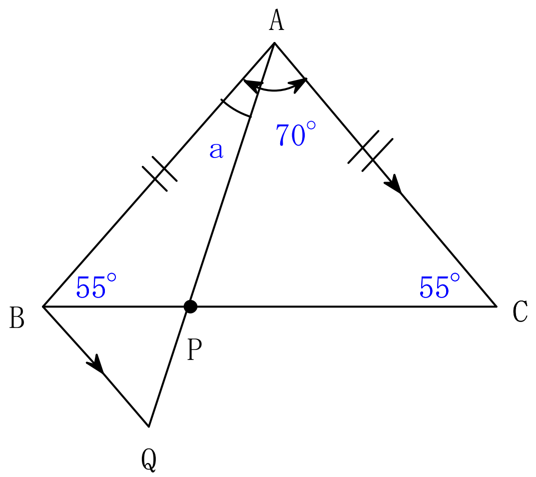
⑧　△ABCが二等辺三角形で頂角BACが70°　ということは，2つの等しい底角の角度の和を，三角形の内角が180°　を利用して求めると

180 － 70 ＝ 110(°)　　　　となります。

⑨　ということは，1つの底角の角度を 110°　を2等分して求めると

110 ÷ 2 ＝ 55(°)　　　　となります。

⑩　このように直接条件から導き出した間接条件も図の中に書き入れて考えるのです。



⑪　すると，求める∠BPQが△ABPの外角になってることに気づきます。

⑫　そうすれば，外角はとなりあわない2つの角の和ということになるので

$$\angle BPQ = \angle BAP + \angle ABP$$

$$= a^\circ + 55^\circ$$

となります。

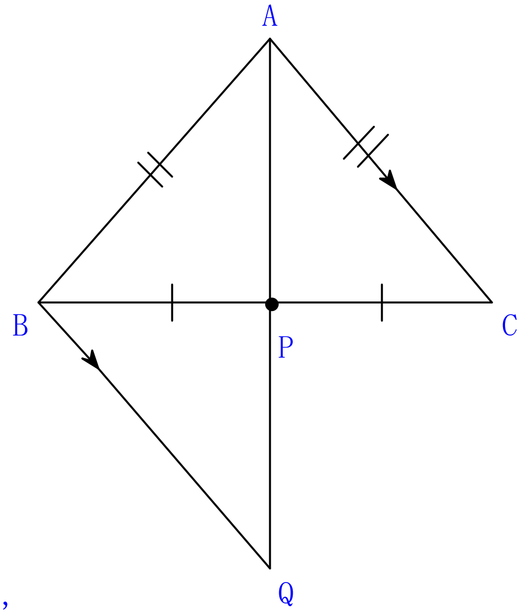
A.　$a^\circ + 55^\circ$

［問2］　右の図2は，図1において，BP ＝ CPの場合を表している。

次の(1)，(2)に答えよ。

(1)　△APC ≡ △QPB であることを証明せよ。

図2



［問題文の読み取り］

①　問題文の条件を図に書き入れるのですが
BP ＝ CP はすでに2本線は使っているので
このような場合は1本にします。

②　△APC ≡ △QPB を証明せよということは，
合同な図形だということですから，
必ず合同条件が与えられているということです。

1）3辺がそれぞれ等しい。
2）2辺とその間の角がそれぞれ等しい。
3）1辺とその両端の角がそれぞれ等しい。

［思考過程］

③　考えるということは比べるところから出発します。

④　ですから，まず△APCと△QPBを比べるのです。すると、最初に気づくのが直接条件

PC ＝ BP　　　　　　　　　　となります。

⑤　そして，図形から直接読み取れる条件としては対頂角が等しいということで

∠APC ＝ ∠QPB　　　　　　　　　　となります。

⑥　すると，1辺と両端の角がそれぞれ等しくなればよいので，どうにか∠ACPと∠ABPが等しくならないものかという視点で図形を見ると AC // BQ に気づきます。

⑦　それに気づけば平行線に交わる直線において錯角は等しくなるので

∠ACP ＝ ∠QBP　　　　　　　　　　となります。

⑧　これで1辺と両端の角がそれぞれ等しくなったので合同条件を満たし

△APC ≡ △QPB　　　　　　　　　となります。

［解答］

△APC と △QPB において

CP = BP

∠APC = ∠QPB（対頂角）

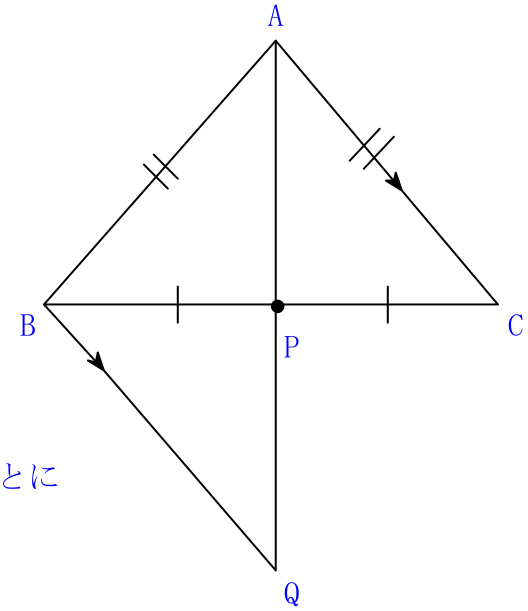
AC // BQより　　∠ACP = ∠QBP（錯角）

1辺とその両端の角がそれぞれ等しいので

△APC ≡ △QPB

［問2］

図2



(2)　図2において，点Pを通り辺ABに平行な直線を引き,辺ACとの交点をRとし,頂点Bと点Rを結んだ線分と、線分APとの交点をSとした場合を考える。

AB ＝ 5cm，BC ＝ 6cm のとき

△SBQの面積は何cm^2か。

［問題文の読み取り］

① 図形問題では条件を作図の手順を示すことによって与える場合がしばしばあります。

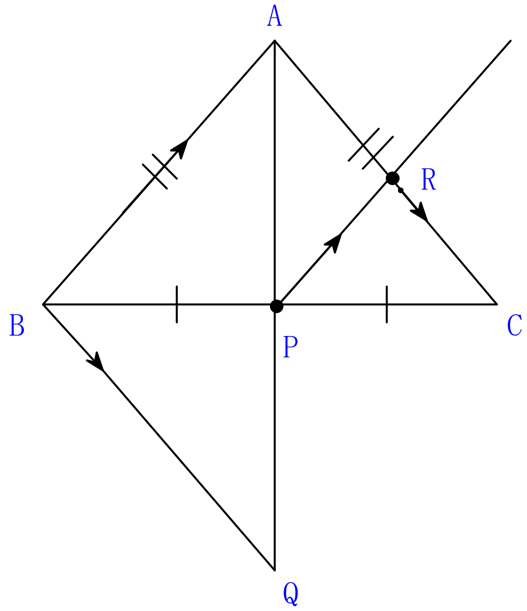
② このような問題でも一気に読まないことです。
文章題以上に脳内処理をすることは危険です。というのは図形をイメージすることは相当な瞬間的記憶力が必要だからです。

③ ですから，条件文を言い切りの短文にして息を継ぎ十分酸素を脳に送り込むことをこころがける必要があります。

［思考過程］

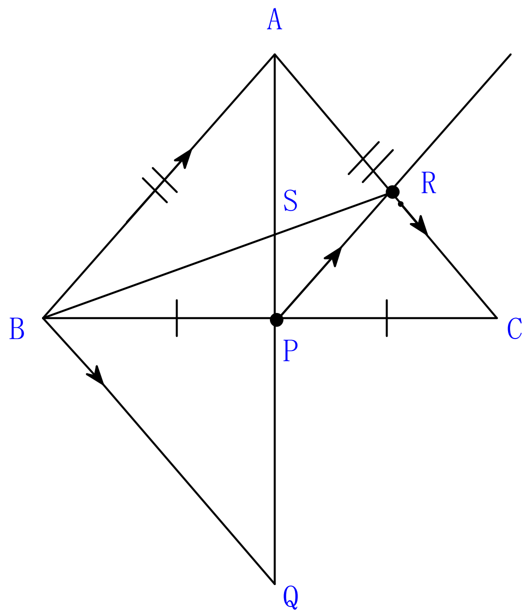
④ 点Pを通り辺ABに平行な直線を引きます。

⑤ 辺ACとの交点をRとします。



⑥　頂点Bと点Rを結びます。

⑦　線分APとの交点をSとします。



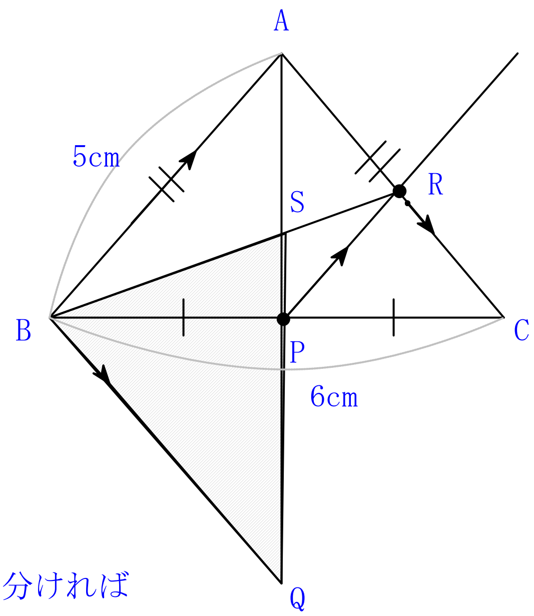
⑧ AB = 5cm, BC = 6cm

⑨　△SBQの面積を求める。

⑩　底辺をQSとして高さをBPとすると

BP = 6 ÷ 2

= 3(cm)　　　　となります。



⑪　そして，底辺QSはQPの長さとPSの長さが分ければ求められるなと考えるのです。
大学受験までの数学問題は必ず解けるように作られていると信じるのです。そうすれば考える気力も湧いてくるものです。

⑫　それと小問がいくつかある場合は前の問題の結果を利用してもよいというルールがあります。大学受験の物理などはそれを大前提として問題が作られているので最初の問題で計算ミスをすると全問間違いになることだってあります。

⑬　そすると，△APC ≡ △QPB から AP = QP ，∠APC = ∠APB = 90°という結果は利用してもよいということになります。

⑭ そこで，△ABPは∠APBが直角となるので直角三角形となり，三平方の定理を利用してAPの長さを求めることができます。

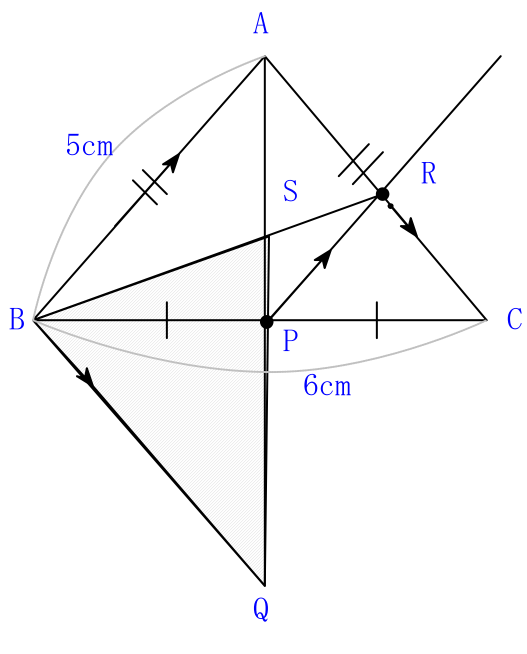
⑮ このことは与えられた条件から推理することもできます。与えられた条件はABとBCの長さですから，ABを辺とする三角形ABPを見つけ出し，BPの長さをBCの長さから導く出すと△ABPが直角三角形になれば三平方の定理が使えそうだという思考過程です。

⑯ いずれにしても，数学は与えられた条件から用いる論理を見つけ出し，その論理に与えられた条件をあてはめて問題を解決していくということをくり返す学問なのです。

⑰ ということで，△ABPの斜辺AP ＝ 5cm，BP ＝ 3cm を三平方の定理にあてはめてAPの長さを求めると

$$\begin{aligned} AP &= \sqrt{AB^2 - BP^2} \\ &= \sqrt{5^2 - 3^2} \\ &= \sqrt{25 - 9} \\ &= \sqrt{16} \\ &= \sqrt{4^2} \\ &= 4(\mathrm{cm}) \end{aligned}$$

となります。



⑱ AP ＝ PQ ということから　　PQ ＝ 4cm　　となります。

⑲ ということは，QSの長さはPSの長さがわかれば求めることができるということになります。

⑳ ではどうすればよいかということになりますが，長さを求めるために使える理論を先ず思いだすのです。すると，比が思い浮かびそれにつられて相似形を連想することになります。

21　相似形ということになると三角形の相似ということになります。どんな多角形もすべて三角形を合成したものであることからも当然のことです。

22　そこで，PSを辺とする三角形を探すと△PSBと△PSRとなります。

23　次に，この2つの三角形の相似となる三角形を探します。

24　すると，△PSBと同じ形の三角形は見当たりません。それに対して△PSRと△ABSは同じ形なのではないかと気づくのです。

25　そこで，条件 AB // PR が与えられている理由が分かるのです。つまり，平行とそれに交わる直線がなす錯角は等しいという理論を用いて相似条件を与えているのだということです。

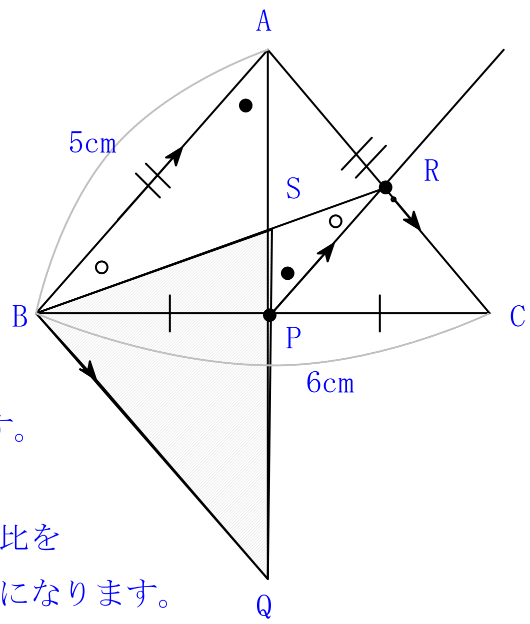
26　△PSR と △ABS において

∠PRS ＝ ∠ABS（錯角）

∠RPS ＝ ∠BAS（錯角）

∠PSR ＝ ∠ASB（対頂角）

よって，　△PSR ∽ △ABS　となります。

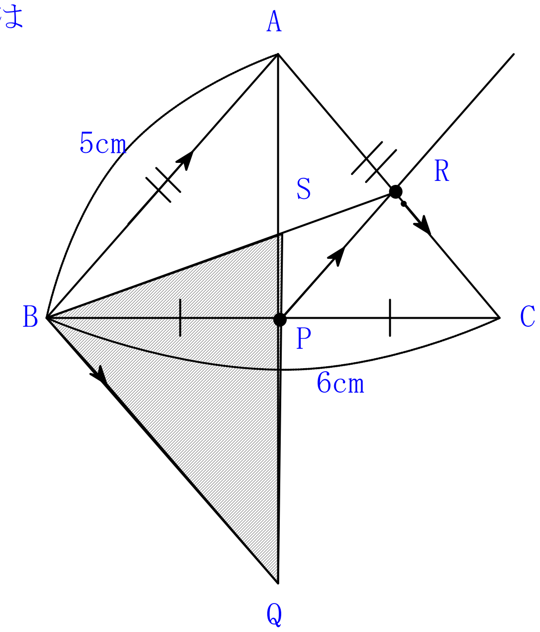


27　相似形ということがわかれば，次に相似比を求めるにはどうすればよいかということになります。

28　ここで，BP ＝ CP と 点Pを通り辺ABと平行に引いたという条件から，これが利用できる論理を連想すると中点連結定理ということになります。

29　中点連結定理から△CRP と △CAB が相似になり相似比が 1 ： 2 となることを導き出すことができます。

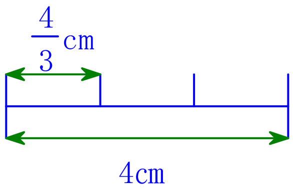
30　そうすると，PR ： AB ＝ 1 ： 2 となるので，△PRS と △ABSとの相似比も 1 ： 2 となります。



31　ということは，相似形の対応する辺の比は
すべて相似比に等しいことから

PS ： AS ＝ 1 ： 2　となります。

32　そして，AP ＝ 4cm ということなので
これを 1 ： 2 に分けるとPSの長さは



$$4 \times \frac{1}{1+2} = 4 \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{4}{3}\,(\mathrm{cm})$$ となります。

33　PS ＝ $\frac{4}{3}$cm ということがわければ，PQ ＝ 4cm なので QSの長さは

$$QS = 4 + \frac{4}{3}$$

$$= \frac{12}{3} + \frac{4}{3}$$

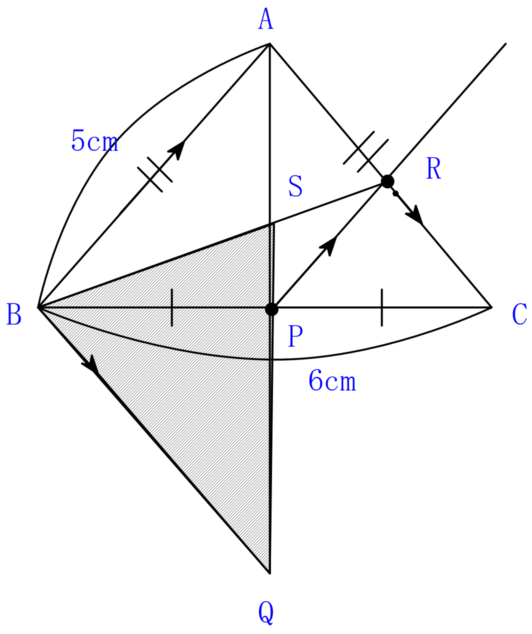
$$= \frac{12+4}{3}$$

$$= \frac{16}{3}\,(\mathrm{cm})$$ となります。

34　QS ＝ $\frac{16}{3}$cm で BP ＝ 3cm の条件を

三角形の面積を求める論理(公式)に

あてはめて△SBQの面積を求めると



$$\frac{16}{3} \times 3 \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{16}{3} \times \frac{3}{1} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{16 \times \overset{1}{\cancel{3}} \times 1}{\underset{1}{\cancel{3}} \times 1 \times 2}$$

$$= \frac{\overset{8}{\cancel{16}} \times 1 \times 1}{\underset{1}{1} \times 1 \times \underset{1}{\cancel{2}}}$$

$$= \frac{8 \times 1 \times 1}{1 \times 1 \times 1}$$

$$= \frac{8}{1}$$

＝ 8(cm^2)　　　　　　　となります。

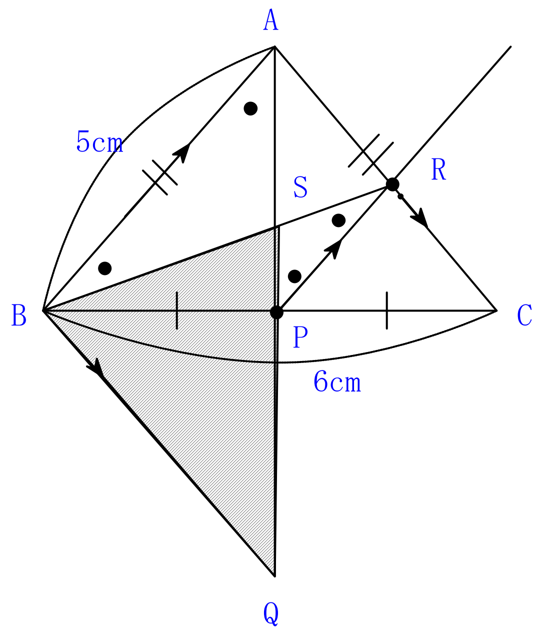
A.　8cm^2

［解答］

△ABP ≡ △ACP より

∠APB = ∠APC = 90°

直角三角形ABPに三平方の定理をあてはめると



$$AP = \sqrt{5^2 - 3^2}$$

$$= \sqrt{16}$$

$$= 4\text{(cm)}$$

△APC ≡ △QPB より

AP = QP = 4cm

△CPR と △CAB において,

中点連結定理より　PR : AB = 1 : 2

△PRS と △ABS において

AB // PR より　∠PRS = ∠ABS

∠RPS = ∠BAS

よって　△PRS ∽ △ABS となり

相似比は　PR : AB = 1 : 2

これより　$PS = 4 \times \dfrac{1}{1+2}$

$$= 4 \times \frac{1}{3}$$

$$PS = \frac{4}{3}\,(\mathrm{cm})$$

$$PQ = \frac{4}{3} + 4$$

$$= \frac{16}{3}\,(\mathrm{cm})$$

したがって，　$\triangle SBQ = \frac{16}{3} \times 3 \times \frac{1}{2}$

$$= 8\,(\mathrm{cm}^2)$$

A.　$8\mathrm{cm}^2$

5

右の図1に示した立体 A － BCD は，1辺の長さが6cmの正四面体である。

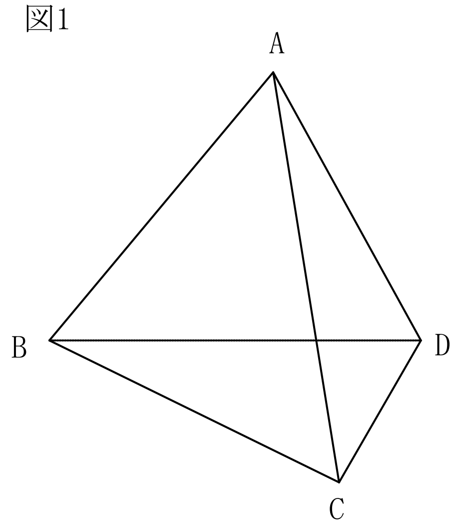
点Pは，頂点Cを出発し，辺CB，辺BA上を毎秒1cmの速さで動き，12秒後に頂点Aに到着する。

点Qは，点Pが頂点Cを出発すると同時に頂点Bを出発し，辺BD，辺DC 上を，点Pと同じ速さで動き，12秒後に頂点Cに到着する。

点Pと点Qを結ぶ。

次の各問に答えよ。

図1



［問1］図1において，点Pが辺CB上にあるとき，辺CBと線分PQが垂直になるのは，点Pが頂点Cを出発してから何秒後か。

［問題の読み取り］

① 正四面体は合同な正三角形4つで囲まれた立体です。

② 図から正三角形のということが読み取りにくい場合がありますが，それはヒントになるので，あえてわかりにくくしているということです。

② 問題文で与えられた条件を図に書き入れてから考えるようにします。

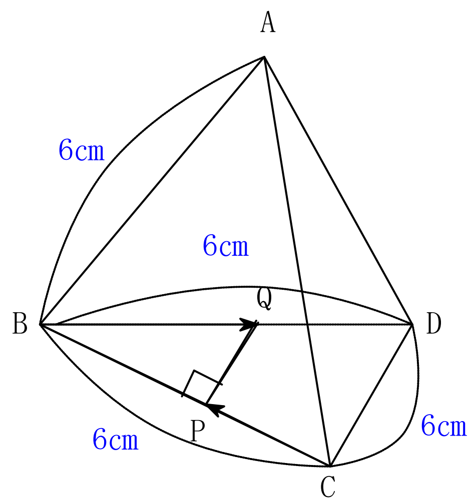
［思考過程］

③ 点Pが頂点Cを出発して頂点Bを通って頂点Aまで進む長さは

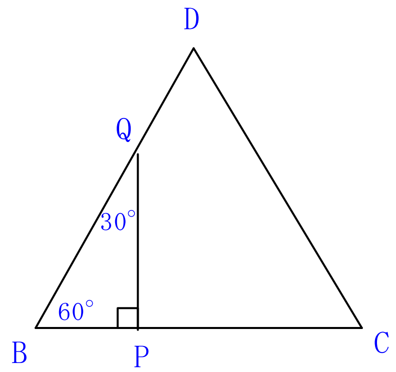
6 ＋ 6 ＝ 12(cm)　　となります。

④ これを12秒で進むのですから1秒間に進む長さは

12 ÷ 12 ＝ 1(cm)　　となります。

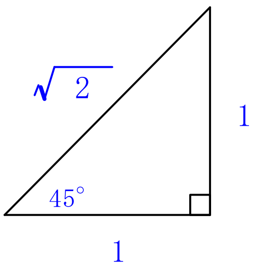


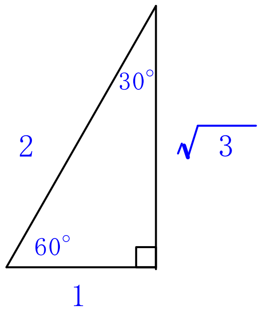
⑤　ここで正三角形BCDを正確に書いて考えると,x秒後に△BPQが直角三角形になることがわかります。



⑥　直角三角形といえば「三平方の定理」というようにすぐ連想できるようにならなければなりません。

⑦　そして，特別な三角形の辺の比はすぐ思い出せるようにしておきましょう。



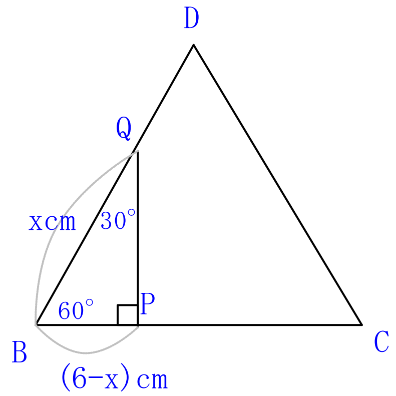


⑧　すると，△BPQの辺の比は

BP ： BQ ＝ 1 ： 2　　　　となります。

⑨　x秒後の BP，BQ の長さとの比例式をつくると

1 ： 2 ＝ (6 － x) ： x　　　　となります。



⑩　比例式において，外項の積と内項の積は等しいという性質があるので、これを利用してxの値を求めると

$$\underbrace{1 : \overbrace{2 = (6 - x)}^{\text{内項}} : x}_{\text{外項}}$$

$$1 \times x = 2 \times (6 - x)$$

$$x = 2 \times 6 - 2 \times x$$

$$x = 12 - 2x$$

$$x + 2x = 12 - \cancel{2x} + \cancel{2x}$$

$$3x = 12$$

$$\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = \frac{12}{3}$$

$$x = \frac{12}{3}$$

$x = 4$(秒)　　　　　　となります。

A.　4秒

［解答］

x秒後に辺BCと線分PQが垂直になるとすると

x秒後に△BPQは 30° 60° 90° の直角三角形になる。

そのときの辺の比は　BP : BQ = 1 : 2

よって，　$1 : 2 = (6 - x) : x$

$$1 \times x = 2 \times (6 - x)$$

$$x = 2 \times 6 - 2 \times x$$

$$x = 12 - 2x$$

$$x + 2x = 12$$

$$3x = 12$$

$$x = 4\text{(秒)}$$

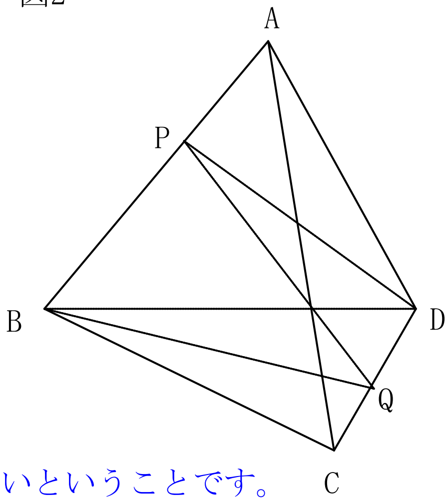
A.　4秒

[問2]

　右の図2は，図1において，点Pが頂点Cを出発してから10秒後のとき，頂点Bと点Q，頂点Dと点Pをそれぞれ結んだ場合を表している。

　立体 P － BQD の体積は，立体 A － BCD の体積の何分のいくつか。

図2



[問題文の読み取り]

① 何分のいくつかということは比で考えなさいということです。

② そうでなければ何cm^3でしょうというような問にしたでしょう。

[思考過程]

③ 底面積を比べるところから始めます。

④ △BDQと△BCD は高さは等しいので底辺比 DQ と DC の比が面積の比となります。

⑤ 10秒間にQが進む長さは

$1 \times 10 = 10(cm)$　　　となります。

⑥ ですから，DQの長さは

$10 - 6 = 4(cm)$　　　となります。

⑦ ということで，△BQDと△BCDの面積比は

$4 : 6 = 2 : 3$　　　となります。

⑧ 次に，P － BQD と A － BCD の高さの比は BP ： BA となります。

⑨ 点Pが10秒間に進む長さも 10cm となるので，BPの長さは

$10 - 6 = 4(cm)$　　　となります。

⑩　ということは，P − BQD と A − BCD の高さの比は

$4 : 6 = 2 : 3$　　　　　　となります。

⑪　三角錐は底面積に高さをかけそれに $\frac{1}{3}$ をかけて求めるので，体積の比を求めるには底面積の比と高さの比をかけ合わせて求めることになるので

P − BQD ： A − ACD $= 2 \times 2 : 3 \times 3$

$= 4 : 9$　　　　　　となります。

⑫　そして，問われているのは 立体 P − BQD の体積は，立体 A − BCD の体積の何分のいくつかということですから，もとになる立体 A − BCD で割って比の値を求めるということになるので

$4 \div 9 = \frac{4}{9}$　　　　　　となります。

A. $\frac{4}{9}$

［解答］

$$DQ = 10 - 6 = 4(cm)$$

$$BP = 10 - 6 = 4(cm)$$

$$DQ : DC = 4 : 6 = 2 : 3$$

$$BP : BA = 4 : 6 = 2 : 3$$

$$P - BQD : A - BCD = 2 \times 2 : 3 \times 3$$

$$= 4 : 9$$

従って，P－BQD は A－BCD の

$4 \div 9 = \dfrac{4}{9}$　　となる。

A. $\dfrac{4}{9}$